第 3 节 含参不等式恒成立问题（★★★☆）

内容提要

本节主要涉及含参不等式恒成立、存在性问题，难度整体偏高.

1．含参不等式小题常用的解题方法和上一节类似，有全分离和半分离两种：

①全分离：将原含参不等式等价变形成$a\le f(x)$这类形式，进而转化为求$f(x)$的最值问题. 当参变分离后的函数$f(x)$不复杂，容易求最值时，可采用此法.

②半分离：将原含参不等式等价变形成$f(x)\le g(a,x)$这类形式，画图分析参数a如何取值才能满足该不等式，这种方法往往需要关注切线、端点等临界状态.

2．全分离后几种常见情况的处理方法：（假设以下涉及到的$f(x)$的最值均存在）

①$\forall x\in D$，$a\le f(x)$恒成立，则$a\le f(x)_{\min}$；②$\exists x\in D$，使$a\le f(x)$成立，则$a\le f(x)_{\max}$，

③$\forall x\in D$，$a\ge f(x)$恒成立，则$a\ge f(x)_{\max}$；④$\exists x\in D$，使$a\ge f(x)$成立，则$a\ge f(x)_{\min}$.

典型例题

类型Ⅰ：全分离、半分离处理简单的含参不等式问题

【例 1】不等式$\ln x-ax+1\le 0$恒成立，则实数a的取值范围为_____.

解法 1：参数可以全分离，先试试全分离，转化为求最值问题，

$\ln x-ax+1\le 0\Leftrightarrow ax\ge 1+\ln x\Leftrightarrow a\ge\dfrac{1+\ln x}{x}$，此不等式要恒成立，只需$a\ge(\dfrac{1+\ln x}{x})_{\max}$，故构造函数求最值，

设$f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}(x>0)$，则$f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$，所以$f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x>1$，

从而$f(x)$在$(0,1)$上↗，在$(1,+\infty)$上↘，故$f(x)_{\max}=f(1)=1$，因为$a\ge f(x)$恒成立，所以$a\ge 1$.

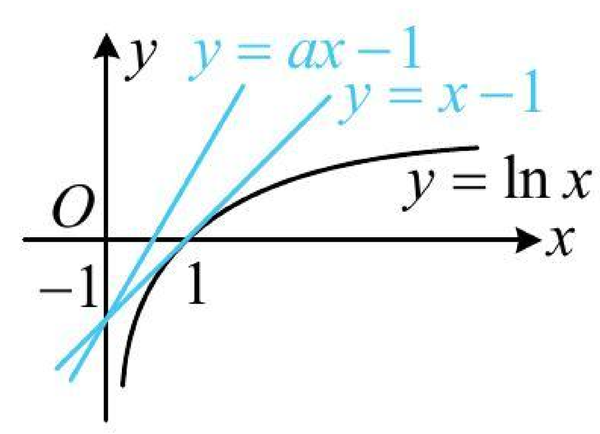
注：此处也可由$\dfrac{1+\ln x}{x}\le\dfrac{1+(x-1)}{x}=1$（当且仅当$x=1$时取等号）得出$f(x)$的最大值为 1.

解法 2：只要将$\ln x-ax+1\le 0$中的$-ax+1$移至右侧，就能作图分析，故也可尝试半分离，

$\ln x-ax+1\le 0\Leftrightarrow\ln x\le ax-1$，如图，$y=ax-1$是绕点$(0,-1)$旋转的直线，

注意到函数$y=\ln x$的图象过点$(0,-1)$的切线是$y=x-1$，所以当且仅当$a\ge 1$时，$\ln x\le ax-1$恒成立.

答案：$[1,+\infty)$



【变式】不等式$a\ln x-x+1\le 0$恒成立，则实数$a=$_____.

本题若全分离，则需同除以$\ln x$，但$\ln x$不恒为正，得讨论，所以半分离较好，

解法 1：$a\ln x-x+1\le 0\Leftrightarrow a\ln x\le x-1$，接下来对$a$讨论，$a$的正负决定是否需要将$y=\ln x$的图象沿$x$轴翻折，所以 0 是一个讨论的分界点；而当$a>0$时，改变$a$就是对$y=\ln x$的图象进行不同的纵向伸缩，临

界状态是 $y=a\ln x$ 恰与直线 $y=x-1$ 相切的情形（此时 $a=1$），所以 1 是一个讨论的分界点；

当 $a=0$ 时，不等式 $a\ln x\le x-1$ 即为 $0\le x-1$，故 $x\ge 1$，不合题意；

当 $a<0$ 时，如图 1，不等式 $a\ln x\le x-1$ 在 $(0,1)$ 上不成立，不合题意；

当 $a=1$ 时，如图 2，不等式 $a\ln x\le x-1$ 恒成立；

当 $0<a<1$ 时，如图 3，不等式 $a\ln x\le x-1$ 在 $x=1$ 的左侧附近有一段不成立，不合题意；

当 $a>1$ 时，如图 4，不等式 $a\ln x\le x-1$ 在 $x=1$ 的右侧附近有一段不成立，不合题意；

综上所述，实数 $a=1$.

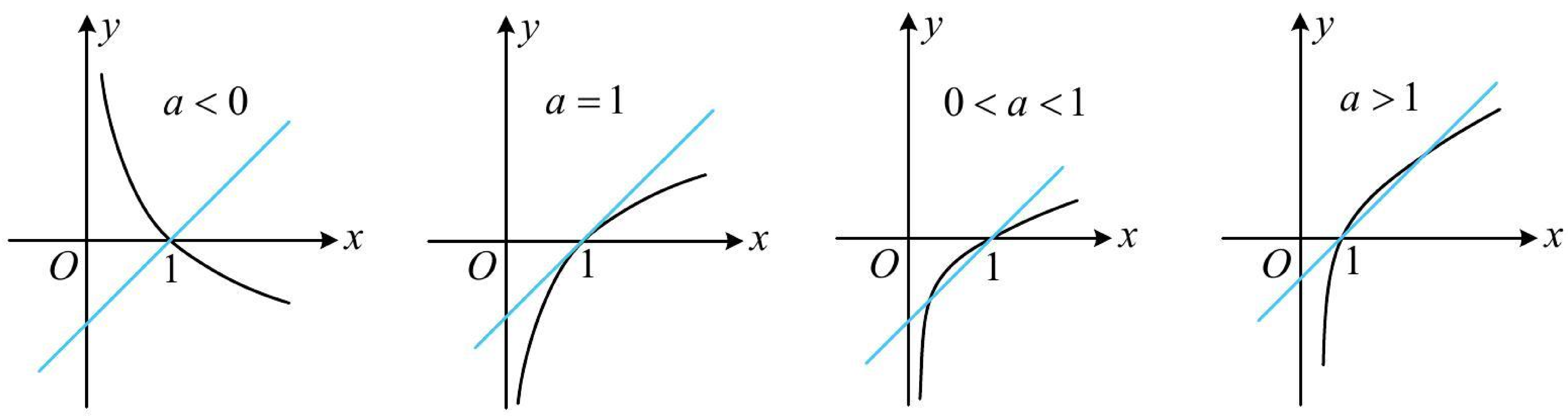


图1　　图2　　图3　　图4

解法 2：在解法 1 中，将原不等式化为 $a\ln x\le x-1$ 后，也可进一步将 a 除到右边，转化为直线旋转型，但需讨论 a 的正负，

当 $a<0$ 时，$a\ln x\le x-1\Leftrightarrow \ln x\ge \dfrac{1}{a}(x-1)$，如图 5，该不等式在 $(0,1)$ 上不成立，不合题意；

当 $a=0$ 时，$a\ln x\le x-1$ 即为 $0\le x-1$，所以 $x\ge 1$，不合题意；

而当 $a>0$ 时，$a\ln x\le x-1\Leftrightarrow \ln x\le \dfrac{1}{a}(x-1)$，$y=\dfrac{1}{a}(x-1)$ 表示过定点 $(1,0)$ 且斜率为 $\dfrac{1}{a}$ 的直线，所以临界状态是 $y=\dfrac{1}{a}(x-1)$ 与 $y=\ln x$ 相切的时候，此时 $a=1$，故又讨论 a 与 1 的大小，

当 $a=1$ 时，如图 6，$y=x-1$ 与 $y=\ln x$ 相切，由图可知不等式 $\ln x\le x-1$ 恒成立，满足题意；

当 $0<a<1$ 时，$\dfrac{1}{a}>1$，如图 7，$\ln x\le \dfrac{1}{a}(x-1)$ 在 $x=1$ 左侧附近有一段不成立，不合题意；

当 $a>1$ 时，$0<\dfrac{1}{a}<1$，如图 8，$\ln x\le \dfrac{1}{a}(x-1)$ 在 $x=1$ 右侧附近有一段不成立，不合题意；

综上所述，实数 $a=1$.

答案：1

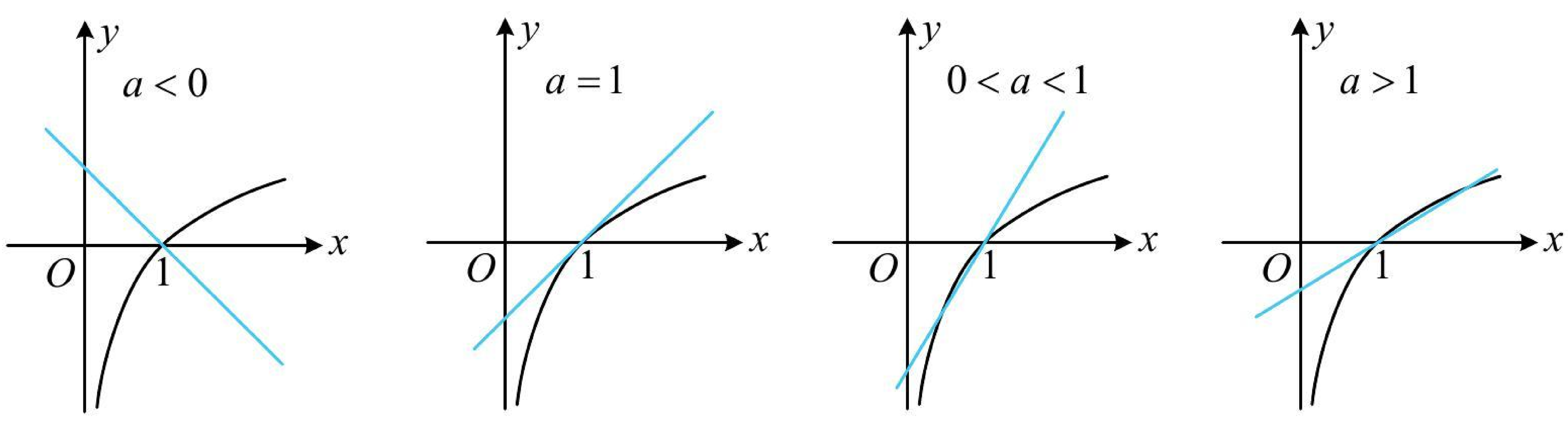


图5　　图6　　图7　　图8

【反思】①像 $af(x)$ 这种结构，若 a 在 $(0,+\infty)$ 上变化，则对 $f(x)$ 的图象进行纵向伸缩；若 a 在 $(-\infty,0)$ 上变

化，则先将 $f(x)$ 的图象沿 x 轴翻折，再纵向伸缩；②半分离常有多种方向，一般研究动直线比动曲线简单.

【总结】从上面两道题可以看到，无论参数在哪个位置，全分离、半分离都是解决含参不等式问题的基本方法.

类型Ⅱ：涉及分段函数的含参不等式问题

【例 2】设函数 $f(x)=\begin{cases}2\ln x, x>0\\ -x^2-2x, x\le 0\end{cases}$，若 $f(x)\le ax+2$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.

解法 1：$f(x)$ 为分段函数，可以分两段分别研究不等式 $f(x)\le ax+2$，

①当 $x\le 0$ 时，$f(x)\le ax+2\Leftrightarrow ax\ge -x^2-2x-2$；两端同除以 x 即可全分离，先考虑 $x=0$ 的情形，

当 $x=0$ 时，不等式 $ax\ge -x^2-2x-2$ 对任意的 $a\in\mathbf{R}$ 都成立；

当 $x<0$ 时，$ax\ge -x^2-2x-2\Leftrightarrow a\le -x+\dfrac{2}{-x}-2$，因为 $-x+\dfrac{2}{-x}-2\ge 2\sqrt{(-x)\cdot\dfrac{2}{-x}}-2=2\sqrt{2}-2$，

当且仅当 $x=-\sqrt{2}$ 时等号成立，所以 $(-x+\dfrac{2}{-x}-2)_{\min}=2\sqrt{2}-2$，故 $a\le 2\sqrt{2}-2$；

②当 $x>0$ 时，$f(x)\le ax+2$ 即为 $2\ln x\le ax+2$，也即 $a\ge\dfrac{2\ln x-2}{x}$，

设 $g(x)=\dfrac{2\ln x-2}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{2(2-\ln x)}{x^2}$，所以 $g'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}^2$，$g'(x)<0\Leftrightarrow x>\mathrm{e}^2$，

从而 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^2)$ 上↗，在 $(\mathrm{e}^2,+\infty)$ 上↘，故 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e}^2)=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$，因为 $a\ge g(x)$ 恒成立，所以 $a\ge\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[\dfrac{2}{\mathrm{e}^2},2\sqrt{2}-2]$.

解法 2：不等式 $f(x)\le ax+2$ 的左右两侧的函数图象都能画，故也可保持这种半分离状态，直接作图分析，

如图，当且仅当直线 $y=ax+2$ 从 l_1 绕点 $(0,2)$ 逆时针旋转至 l_2 时，不等式 $f(x)\le ax+2$ 恒成立，

下面求解这两个临界状态，设 $l_1: y=a_1x+2$，$l_2: y=a_2x+2$，先求 l_1 的斜率 a_1，

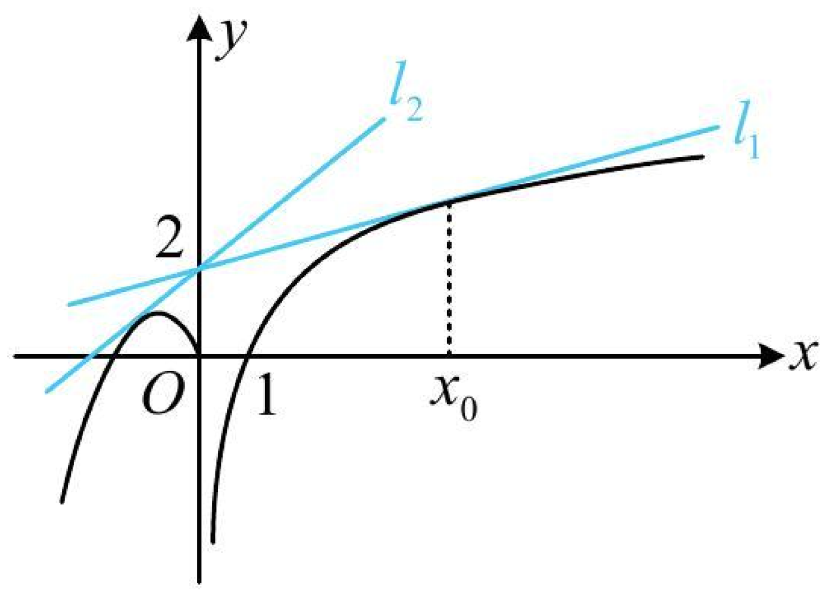
直线 l_1 与 $y=2\ln x$ 相切，设切点为 $(x_0,2\ln x_0)$，因为 $(2\ln x)'=\dfrac{2}{x}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{2}{x_0}=a_1\\ 2\ln x_0=a_1x_0+2\end{cases}$，解得：$a_1=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$；

再求 l_2 的斜率 a_2，l_2 与曲线 $y=-x^2-2x(x\le 0)$ 相切，$\begin{cases}y=a_2x+2\\ y=-x^2-2x\end{cases}\Rightarrow x^2+(a_2+2)x+2=0$，

判别式 $\Delta=(a_2+2)^2-8=0\Rightarrow a_2=2\sqrt{2}-2$ 或 $-2\sqrt{2}-2$（舍去），（过点 $(0,2)$ 能作抛物线 $y=-x^2-2x$ 的两条切线，图中的 l_2 是斜率为正的那条，故将 $-2\sqrt{2}-2$ 舍去）

由图可知，当且仅当 $a\in[\dfrac{2}{\mathrm{e}^2},2\sqrt{2}-2]$ 时，$f(x)\le ax+2$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

答案：$[\dfrac{2}{\mathrm{e}^2},2\sqrt{2}-2]$



【反思】全分离重在等价变形和求最值，半分离重在分析图象的运动过程，求解临界状态.

强化训练

1.（2023·上海浦东新区模拟·★★）已知关于 x 的不等式 $x-\ln x-a>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

2.（★★★）存在 $x>0$，使得 $\ln x-ax+2>0$，则实数 a 的取值范围为_____.

3.（2023·新高考Ⅱ卷·★★★）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增，则 a 的最小值为（　　）

（A）e^2　（B）e　（C）e^{-1}　（D）e^{-2}

4.（2022·江西萍乡三模·★★★）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，若存在 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$，使不等式 $f(x\cos x)\geq f(a-\sin x)$ 成立，则实数 a 的最大值为（　　）

（A）-4　（B）1　（C）4　（D）6

5.（2018·天津卷·★★★）已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2,x\leq 0\\-x^2+2x-2a,x>0\end{cases}$，若对任意的 $x\in[-3,+\infty)$，$f(x)\leq|x|$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____.

6．（2022・天津模拟・★★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}e\ln x, x>0\\ e^x, x\le 0\end{cases}$，若不等式 $f(x)\le 2|x-a|$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.

7.（2022 •江西南昌三模 •★★★★）已知 a 和 x 是正数，若不等式 $x^{\frac{1}{a}}\ge a^{\frac{1}{x}}$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,\frac{1}{e}]$　　（B）$[\frac{1}{e},1)$　　（C）$[\frac{1}{e},1)\cup(1,e)$　　（D）$\{\frac{1}{e}\}$